

LEIS DOS COSSENOS E SENOS ESFÉRICOS: DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS PARA FERRAMENTAS ASTRONÔMICAS

THE SPHERICAL COSINES AND SINES LAWS: MATHEMATICAL PROOFS FOR ASTRONOMICAL TOOLS

Lucas Antonio Caritá¹

Resumo: *A primeira aplicação da geometria esférica surgiu com a astronomia difundida pelos gregos, ainda no século IV a. C. Desde então, essa geometria não euclidiana, tornou-se uma ferramenta de alta aplicabilidade na área. Este trabalho tem como objetivo apresentar demonstrações matemáticas para dois teoremas da trigonometria esférica: a lei dos cossenos e a lei dos senos esféricos e, com isso, fundamentar esses resultados que são utilizados no estudo do triângulo de posição, o qual possibilita determinar a separação angular entre dois astros.*

Palavras-chave: Astronomia esférica; astronomia de posição; trigonometria esférica.

Abstract: *The first application of spherical geometry emerged with the astronomy widespread by the Greeks, in the IV century B.C. Since then, this non-Euclidean geometry became a highly applicable tool in the area. This work aims at presenting mathematical proofs for two theorems of spherical trigonometry: the spherical cosines and the spherical sines rules and, with this, justify the results used in the position triangle studies, which allows a determination of the angular separation between two stars.*

Keywords: Spherical astronomy; position astronomy; spherical trigonometry.

1. INTRODUÇÃO

A geometria esférica pode ser considerada a primeira geometria não euclidiana, a qual se desenvolveu inicialmente nos campos da navegação e astronomia, quando os gregos, ainda no século IV a.C., criaram um modelo de mapeamento astronômico no qual a Terra é idealizada como o centro de uma grande superfície esférica, a esfera celeste, que seria o céu contendo os astros.

Surgiu, assim, a astronomia esférica, ou astronomia de posição, que diz respeito, fundamentalmente, às direções nas quais os astros são observados, sem se preocupar com a sua distância em relação à Terra (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2004).

Fica, então, evidente a necessidade de formalizar matematicamente a geometria a que subjaz esse modelo astronômico. Porém, em geral, estudantes (ou profissionais) da astronomia não possuem treinamento profundo em matemática pura, e não é tarefa fácil encontrar na literatura um tratamento matemático simples adequado para o conteúdo. Geralmente o que se encontra é apresentado de dois modos: de maneira informal, com demonstrações confusas e incompletas ou utilizando matemática muito avançada, em que se exige conhecimentos prévios de Geometria Diferencial,

¹ Doutorado em Física e Astronomia pela Universidade do Vale do Paraíba/UNIVAP, Brasil. E-mail: lucasacarita@gmail.com.

impossibilitando o acesso aos que não possuem esse requisito. Sendo assim, este trabalho visa a ajudar a preencher essa lacuna, demonstrando dois teoremas da trigonometria esférica: a lei dos senos e a lei dos cossenos esféricos, que são essenciais para o estudo do triângulo de posição, empregado para determinar a separação angular entre dois astros (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2004).

Para isso, foi elaborado um texto que preza pela clareza dos argumentos e que, ao mesmo tempo em que utiliza uma matemática acessível ao leitor, não deixa de lado o rigor que se deve ter um bom texto sobre o assunto. Organizado de forma construtivista, no qual o leitor encontra, inclusive, as definições mais básicas pela qual se apoiar, este texto foi cuidadosamente preparado de modo que possa ser entendido mesmo por quem não possui conhecimento avançado em matemática.

2. OBJETIVOS

Este trabalho possui como objetivo geral apresentar demonstrações simples das leis dos cossenos e senos esféricos, de modo que estudantes e professores dedicados à astronomia de posição ou geometrias não euclidianas possuam um material de fácil acesso e compreensão, independente do nível de conhecimento prévio, para complementar os estudos.

Para isso, os objetivos específicos são:

- Demonstrar as leis, fazendo, sempre que possível, uma ponte entre geometria euclidiana e a geometria não euclidiana, para que os não habituados com a negação do 5º postulado de Euclides possam se convencer da veracidade dos resultados, baseados em argumentos fundamentados pela geometria na qual estão acostumados,
- Demonstrar as leis sem ocultar passos ou raciocínios utilizados no processo, para facilitar o acompanhamento,
- Demonstrar as leis, organizando as informações de forma construtivista, partindo de definições e resultados básicos, e, assim, fundamentar e elucidar os teoremas centrais do trabalho.

3. DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

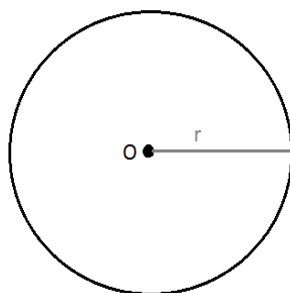
3.1 Teoria Preliminar

O primeiro passo é definir os principais objetos de trabalho. Para isso, serão utilizados como referencial teórico os textos de Adames (2005), Fernandes (2008) e Zanella (2013).

Definição 1: Uma circunferência de centro O e raio $r > 0$ é o conjunto de todos os pontos P contidos em um mesmo plano, que contém O , e que distam r do ponto O . (Vide

Figura 1).

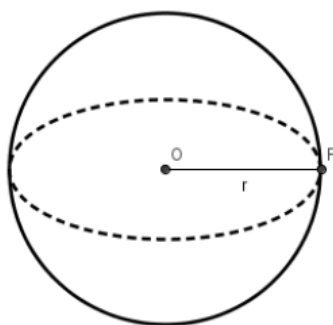
Figura 1 - Circunferência de centro O e raio r .



Fonte: O autor.

Definição 2: Chama-se superfície esférica de centro O e raio $r > 0$, o conjunto dos pontos P do espaço que distam r do ponto O . (Vide Figura 2).

Figura 2 - Superfície esférica de centro O e raio r .



Fonte: O autor.

Embasados nas definições acima, pode-se demonstrar o lema seguinte:

Lema 1: A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e raio da superfície esférica.

Demonstração:

Sejam S uma superfície esférica de centro O e raio $r > 0$ e θ um plano contendo O .

A interseção $C = \theta \cap S$ é o conjunto de pontos de θ que distam r de O . Ou seja, C é uma circunferência, contida no plano θ , de centro O e raio r , em que O é o mesmo centro e r é o mesmo raio de S .

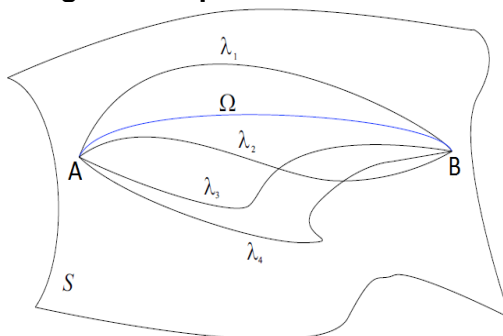
c.q.d.

Definição 3: Circunferências obtidas de acordo com o lema anterior são

denominadas circunferências máximas¹.

Definição 4: Dados dois pontos A e B em uma superfície S qualquer, diz-se que Ω é uma geodésica de S ligando A e B se Ω é a curva sobre S de menor comprimento entre A e B . (Vide Figura 3).

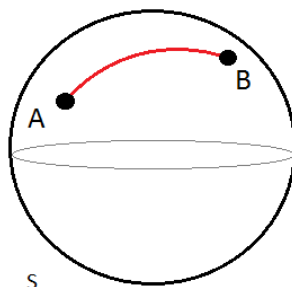
Figura 3 - Geodésica Ω ligando os pontos A e B em uma superfície qualquer S .



Fonte: O autor.

No caso de dois pontos A e B em uma superfície esférica S , a geodésica é o menor arco \widehat{AB} da circunferência máxima de S que contém A e B . (Vide Figura 4).

Figura 4 - Geodésica ligando os pontos A e B em uma superfície esférica S .

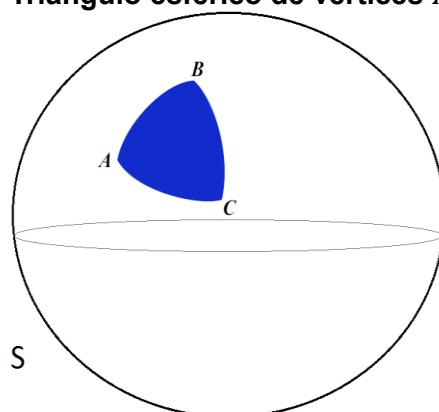


Fonte: O autor.

Definição 5: Se três pontos A , B e C sobre uma superfície esférica S não estão sobre uma mesma circunferência máxima, tem-se que A , B e C definem uma região convexa em S , limitada pelas geodésicas γ_{AB} (entre A e B), γ_{AC} (entre A e C) e γ_{BC} (entre B e C). Chama-se essa região de triângulo esférico com vértices A , B e C . As geodésicas são denominadas lados do triângulo esférico. (Vide Figura 5).

¹ Usualmente, nos textos sobre Astronomia Esférica, tais objetos são denominados “círculos máximos”. Porém, neste trabalho, optou-se por manter a nomenclatura matematicamente mais adequada.

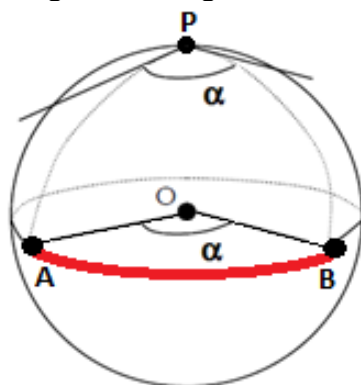
Figura 5 - Triângulo esférico de vértices A , B e C .



Fonte: O autor.

Definição 6: Um ângulo esférico é o ângulo entre dois arcos de circunferências máximas, isto é, o ângulo euclidiano entre os dois planos que contém, os arcos das circunferências máximas. (Vide Figura 6).

Figura 6 - Ângulo esférico.



Fonte: O autor.

No caso ilustrado, o ângulo entre o plano que contém o arco \widehat{PA} e o plano que contém o arco \widehat{PB} é α . Logo, pela Definição 6, o ângulo no vértice P é o ângulo esférico α .

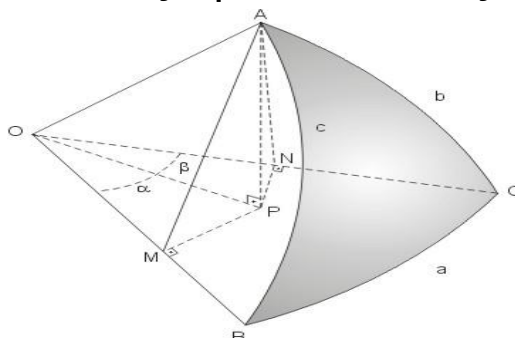
Uma observação interessante é que nos triângulos esféricos tanto os ângulos internos quanto os lados possuem medidas angulares.

3.2 Leis dos Cossenos e Senos Esféricos

As demonstrações que seguem foram desenvolvidas a partir de deduções feitas por Santiago (2005), disponíveis na internet.

Como forma de orientação para as próximas demonstrações, observe a Figura 7 em que O é o centro da esfera e as deduções seguintes.

Figura 7 - Figura de orientação para as demonstrações dos teoremas.



Fonte: Santiago (2014).

Considere a reta perpendicular ao plano OBC que passa pelo vértice A do triângulo e P o ponto de interseção da reta com o plano. Nesse caso, define-se o segmento AP como perpendicular ao plano OBC . Pelo mesmo processo, porém partindo do ponto P , consegue-se os segmentos PM e PN , perpendiculares aos segmentos OB e OC , respectivamente. Desse modo, os triângulos euclidianos APN , APM , ONP , OMP , OPA , ONA e OMA são retângulos.

Do triângulo retângulo euclidiano ONA , segue que $\cos(b) = \frac{ON}{OA}$ e $\text{sen}(b) = \frac{AN}{OA}$, uma vez que o ângulo do vértice O coincide com o lado b do triângulo esférico.

Analogamente, do triângulo retângulo euclidiano OMA , segue que $\cos(c) = \frac{OM}{OA}$ e $\text{sen}(c) = \frac{AM}{OA}$, uma vez que o ângulo do vértice O coincide com o lado c do triângulo esférico.

Considerando os triângulos retângulos euclidianos OMP e ONP , sendo os ângulos com vértice em O , representados, respectivamente, por α e β , tem-se $\cos(\alpha) = \frac{OM}{OP}$, $\text{sen}(\alpha) = \frac{MP}{OP}$, $\cos(\beta) = \frac{ON}{OP}$ e $\text{sen}(\beta) = \frac{NP}{OP}$.

Feitas essas deduções, pode-se enunciar e demonstrar os principais resultados deste trabalho.

Teorema 1 (Lei dos Cossenos Esféricos): Seja um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 7. Então, são verdadeiras:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \text{sen}(b) \text{sen}(c) \cos(\hat{A})$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cos(c) + \text{sen}(a) \text{sen}(c) \cos(\hat{B})$$

e

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) \cos(\hat{C})$$

Demonstração:

Embasados em todas as relações citadas anteriormente, e observando que $\alpha + \beta = a$, faz-se os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} OM &= OA \cdot \cos(c) \Rightarrow OP \cdot \cos(\alpha) = OA \cdot \cos(c) \\ &\Rightarrow OP \cdot \cos(a - \beta) = OA \cdot \cos(c) \\ &\Rightarrow OP \cdot [\cos(a) \cos(\beta) + \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(\beta)] = OA \cdot \cos(c) \\ &\Rightarrow OP \cdot \left[\cos(a) \cdot \frac{ON}{OP} + \operatorname{sen}(a) \cdot \frac{NP}{OP} \right] = OA \cdot \cos(c) \\ &\Rightarrow \cos(a) \cdot ON + \operatorname{sen}(a) \cdot NP = OA \cdot \cos(c) \end{aligned}$$

De onde se conclui, como $ON = OA \cdot \cos(b)$, que:

$$OA \cdot \cos(c) = OA \cdot \cos(b) \cos(a) + NP \cdot \operatorname{sen}(a) \quad (EQ 1)$$

Considerando o triângulo retângulo euclidiano APN, tem-se

$$\cos(\hat{N}) = \frac{NP}{AN} \Rightarrow NP = \cos(\hat{N}) \cdot AN$$

Mas, pela Definição 6, \hat{N} é igual ao ângulo esférico \hat{C} , já que \hat{N} é, também, o ângulo euclidiano entre os planos OAC e OBC . Desse modo,

$$NP = \cos(\hat{N}) \cdot AN \Rightarrow NP = \cos(\hat{C}) \cdot AN$$

E substituindo em (EQ 1), segue:

$$OA \cdot \cos(c) = OA \cdot \cos(b) \cos(a) + OA \cdot \operatorname{sen}(b) \cos(\hat{C}) \operatorname{sen}(a)$$

Ou seja,

$$\cos(c) = \cos(b) \cos(a) + \operatorname{sen}(b) \operatorname{sen}(a) \cos(\hat{C})$$

O que demonstra uma das relações. As outras duas são obtidas pelo mesmo processo.

c.q.d.

Teorema 2 (Lei dos Senos Esféricos): Seja um triângulo esférico de vértices A , B e C , com ângulos internos medindo \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente, como na Figura 7. Então

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$$

Demonstração:

Dos triângulos retângulos euclidianos OMA e APM , que possuem o lado AM em comum, segue:

$$\text{sen}(c) = \frac{AM}{OA} \Rightarrow AM = OA \cdot \text{sen}(c)$$

e

$$\text{sen}(\hat{M}) = \frac{AP}{AM} \Rightarrow AM = \frac{AP}{\text{sen}(\hat{M})}$$

Mas, pela Definição 6, \hat{M} é igual ao ângulo esférico \hat{B} , já que \hat{M} é, também, o ângulo euclidiano entre os planos OAB e OBC . Desse modo,

$$OA \cdot \text{sen}(c) = \frac{AP}{\text{sen}(\hat{B})} \quad (EQ 2)$$

Dos triângulos retângulos euclidianos ONA e APN , que possuem o lado AN em comum, segue:

$$\text{sen}(b) = \frac{AN}{OA} \Rightarrow AN = OA \cdot \text{sen}(b)$$

e

$$\text{sen}(\hat{N}) = \frac{AP}{AN} \Rightarrow AN = \frac{AP}{\text{sen}(\hat{N})}$$

Mas, pela Definição 6, \hat{N} é igual ao ângulo esférico \hat{C} , já que \hat{N} é, também, o ângulo euclidiano entre os planos OAC e OBC . Desse modo,

$$OA \cdot \text{sen}(b) = \frac{AP}{\text{sen}(\hat{C})} \quad (EQ 3)$$

De (EQ 2) e (EQ 3), conclui-se que $\frac{AP}{OA} = \text{sen}(c)\text{sen}(\hat{B}) = \text{sen}(b)\text{sen}(\hat{C})$, o que implica $\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$. Isso demonstra uma das igualdades. A outra é obtida por intermédio do mesmo processo.

c.q.d

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram demonstrados dois teoremas relevantes da trigonometria esférica: a lei dos senos e a lei dos cossenos esféricos. Com isso, evidencia-se que é possível demonstrar tais teoremas fazendo uma ponte entre a geometria euclidiana e a geometria esférica, de modo a obter demonstrações de fácil compreensão.

Sendo assim, este texto é uma alternativa para os que possuem uma curiosidade mais aguçada buscarem a justificativa matemática do funcionamento de tais leis, que são, deveras, aplicáveis na astronomia, bem como serve como material de apoio a

disciplinas de física ou matemática que abordam tópicos em astronomia de posição ou geometrias não euclidianas.

REFERÊNCIAS

ADAMES, M. R. **Geometria Esférica**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

FERNANDES, J. **Princípios de Astronomia Esférica**. Notas de aula (Graduação em Engenharia Geográfica e Matemática) – Universidade de Coimbra, Coimbra (Portugal), 2008.

OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.

SANTIAGO, B. **Trigonometria Esférica**. 2005. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm>>. Acesso em: 25 mar. 2014.

ZANELLA, I. A. **Geometria Esférica: uma proposta de atividades com aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática – PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.